$$\begin{cases} K(1) = b \\ K(1) = 2F(1) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \text{d'où } b = \frac{\pi}{2}$$

Conclusion : $\forall x > 0 : F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Solution 10 :

1°/ $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

$Df = [-1, 1]$

2°/ f est continue sur $[-1, 1]$

D'où il existe au moins une primitive F définie sur $[-1, 1]$

Or $F(0) = 0$ alors F est unique .

3°/ a) $\varphi(x) = F(\sin x)$

$\varphi = F_0 \sin$

sin est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin x \in [-1, 1] = Df$ alors φ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\varphi'(x) = F'(\sin x)\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}\cos x = \sqrt{\cos^2 x}\cos x = \cos^2 x$

$\varphi'(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$

b) $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$

Alors $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin(2x) + x) + c$

Or $\varphi(0) = F(0) = 0$

D'où $0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$